Regneprogrammer

– en analyse af faglige og pædagogiske muligheder

Af Inge B. Larsen

1. Indledning

Det er herligt at kunne gå og løbe, at kunne bevæge sig omkring udelukkende ved hjælp af sin egen krop, men hvis det var den eneste måde, man kunne komme omkring på, ville ens muligheder være noget begrænsede. Biler, tog og flyvemaskiner er transportmidler, der hurtigt kan bringe vores krop fra et sted til et andet og på den måde åbne nye muligheder for os. Vi har vænnet os til disse transportmidler, og vi vil nok have svært ved at forestille os en tilværelse uden dem. På den anden side har disse transportmidler jo på ingen måde overflødiggjort vores evne til at komme rundt ved egen kraft.

Ad tankens vej kan vi bevæge os langt, men også vores tanker har deres begrænsninger, fx ved at de bygger på vores begrænsede hukommelse. Derved er der bl.a. sat grænser for hvad vi kan regne i hovedet og for størrelsen af de abstrakte strukturer, vi kan overskue. Men som bil, tog og flyvemaskine kan være transportmidler for kroppen, kan computeren være transportmiddel for tanken, og vi kan med computeren ikke alene opbygge og fastholde strukturer, men også få disse strukturer til at fungere og på den måde give os feedback.

Da computere tilmed er ved at være hvermands eje, er det da heller ikke overraskende, at den ny folkeskolelov fra 1993 kræver, at edb integreres i alle fag.

Allerede i 1980 udsendte NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics) i U.S.A. hæftet An Agenda for Action. Det indeholdt 8 anbefalinger til, hvad skolematematikken i 80'erne skulle dreje sig om, og som det 3. anbefaledes at:

> *'mathematics programs take full advantage of the power of*
> *calculators and computers at all grade levels'*

2. Værktøjer i matematikundervisningen

At kunne nedfælde tanker og resultater har altid været vigtigt i forbindelse med matematikundervisningen, så tavle og griffel, senere afløst af papir og blyant har været basale værktøjer i skolens matematikundervisning. Anvendelsen af papir og blyant ville i dag for en meget stor dels vedkommende kunne afløses af brug af computer.

Men også andre værktøjer har været med til at forme skolens matematikundervisning. Værktøjerne er med til at bestemme, hvilke emner der kan tages op, hvordan de kan behandles, og hvor lang tid det er nødvendigt at anvende på dem. Det er derfor vigtigt, at vi til stadighed i takt med udviklingen af de mange nye edb-værktøjer tager indhold og metoder i skolens matematikundervisning op til revision.

Kvadratrodsuddragning

Emnet kvadratrodsuddragning giver et godt eksempel på, hvordan det til rådighed stående værktøj har haft betydning for behandlingen af emnet.

I 50'ernes mellemskole lærte eleverne en algoritme til brug ved uddragning af kvadratroden af et tal. Algoritmen, der i sin opstilling ligner divisionsalgoritmen, men er langt mere kompliceret, var tidkrævende både at udføre og at lære. Til gengæld krævede den kun brug af papir og blyant og ikke at forglemme elevens færdighed i at anvende algoritmen.

```
√6041,0000 = 77,72
 49
 ---------
 1141        114:14 = 7
( 147)
 1029
 ---------
  11200      1120:154 = 7
(  1547)
  10829
 ---------
    37100    3710:1554 = 2
(   15542)
    31084
 ---------
      6016
```

Den såkaldte blå betænkning fra 1960 lægger afstand til denne omstændelige metode til kvadratrodsuddragning. Man kan her læse:

> *'Metoden til bestemmelse af kvadratrødder, ciffer for ciffer, ved hjælp af et divisionslignende regneskema er ikke foreskrevet. I stedet bør eleverne øves i brugen af en kvadrattavle.'*

Der kræves altså et nyt værktøj, en kvadrattavle. Kvadratrodsuddragning bliver derved nemmere for eleverne, men der er dog en ny færdighed at lære, nemlig håndteringen af værktøjet, i dette tilfælde tabelbrug. Bemærk, at det er en kvadrattavle, der henvises til, så eleverne skal ikke blot kunne finde indgangsværdier i tabellen og aflæse resultatet, de skal også kunne gå den modsatte vej for at finde kvadratrødder. Årsagen er jo nok, at der til skolebrug kun fandtes kvadrattabeller i handelen. Først senere fandt behjertede personer på yderligere at forenkle kvadratrodsuddragningen ved at udgive kvadratrodstabeller.

Den blå betænkning introducerer også to andre værktøjer, logaritmetabel og regnestok, til matematik på skolens ældste klassetrin:

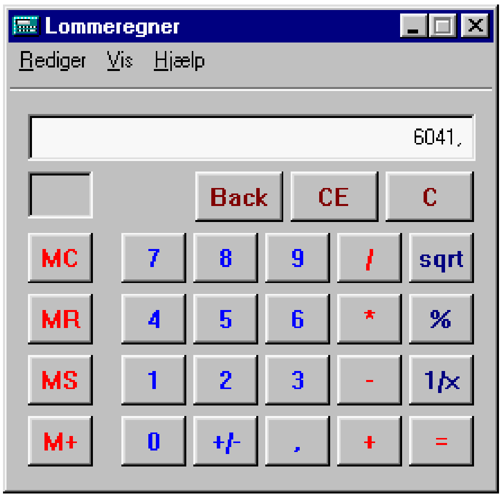
'I regneundervisningen bør der for de elevers vedkommende, der læser matematik, stilles opgaver, der er egnede til løsning ved hjælp af logaritmetabel og/eller regnestok. Eleverne bør øves i at anlægge et fornuftigt skøn over, hvilket hjælpemiddel det i den enkelte opgave vil være hensigtsmæssigt at anvende.'

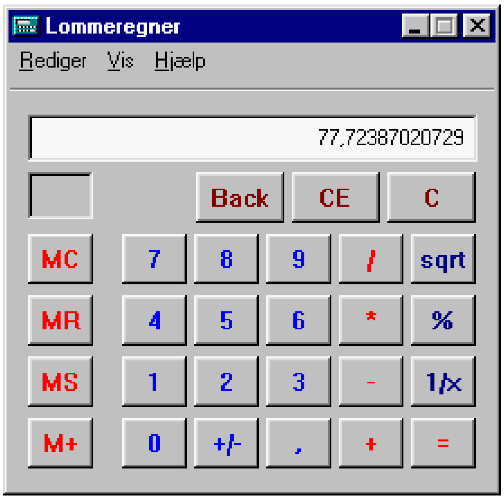
En kvadratrodsuddragning kunne altså også foretages ved hjælp af regnestok. I øvrigt må den sidste sætning i citatet, der er mere end 35 år gammelt, siges at være endnu mere aktuel i dag end dengang. Der er jo i dag betragtelig flere hjælpemidler at vælge imellem.

Ifølge en cirkulæreskrivelse fra 1978 bliver det muligt at anvende lommeregner til kvadratrodsuddragning:

'Ved besvarelse af opgavesættet i problemregning ved folkeskolens afgangsprøve i regning/matematik, ... , må der anvendes elektroniske lommeregnere, som skal udføre operationerne: Addition, subtraktion, multiplikation, division og kvadratrodsuddragning.'

Arbejdet med at uddrage kvadratroden er dermed reduceret til indtastning af tallet efterfulgt af tryk på en tast.





Med den ny folkeskolelov af 1993 skal edb integreres i alle fag, og på computeren vil man finde kvadratrodsfunktionen indbygget i mange forskellige programmer.

Man kan således se, hvordan hjælpemidlerne til kvadratrodsuddragning over et lille halvt århundrede har bevæget sig fra at være kun papir og blyant over kvadrattavle, kvadratrodstavle, regnestok og frem til en indbygget kvadratrodsfunktion i et elektronisk værktøj. Samtidig er den indsats, eleven har skullet levere for at finde kvadratroden af et tal, dels blevet ændret og dels blevet reduceret kraftigt.

Muligheder for en lignende udvikling vil man naturligvis kunne se indenfor mange andre emner. Et betydningsfuldt spørgsmål i den forbindelse vil være om vigtige færdigheder går tabt. Færdigheder der er nødvendige for til fulde at forstå, hvornår, hvordan og hvorfor værktøjet kan anvendes, eller som måske er vigtige i helt andre sammenhænge.

Det nytter ikke meget, at man kan tænde og indstille en micro-ovn, hvis man ikke ved, hvad der er passende at putte i den, og hvordan indstillingen af ovnen skal hænge sammen med det, der er puttet i den.

I tilfældet med kvadratrodsuddragning vil man næppe mene, at vigtige færdigheder er gået tabt. En simpel multiplikation er jo nok til at overbevise om, at resultatet er rigtigt, og selv om man ikke ved i detaljer, hvordan den indbyggede elektroniske kvadratrodsfunktion virker, så vil man i princippet selv kunne finde kvadratroden ved at gætte og multiplicere sig frem.

Sagt med andre ord, den divisionslignende algoritme for kvadratrodsuddragning er ikke afgørende for forståelsen af (måske snarere tværtimod), hvad kvadratroden af et tal er og kan bruges til.

Sorte bokse

Den i lommeregner og edb-programmer indbyggede kvadratrodsfunktion optræder, som det man kalder en sort boks. Man ved hvad den skal have som inddata, og man ved, hvad den leverer som uddata, men man ved ikke hvilken algoritme, der forbinder de to.

En sort boks kan gøre os livet lettere og åbne for nye muligheder. Den gør, at vi kan reducere eller helt overspringe tidkrævende gøremål, og at vi dermed kan koncentrere os om nye og i en vis forstand overliggende gøremål. Vor hverdag er fyldt med sorte bokse, og der bliver til stadighed flere af dem: bil, vaskemaskine, micro-ovn, video, modem osv. De giver os nye muligheder, men rummer også en fare, hvis vi ikke kender deres anvendelsesmuligheder og i forbindelse dermed især deres begrænsninger.

Brugen af computer i matematikundervisningen giver os mulighed for at introducere sorte bokse i vores arbejde med matematikken i et hvilket som helst emne og på et hvilket som helst niveau. Men der vil altid være nødvendige forudsætninger for, at man kan have nytte af en sort boks.

Fx vil man ikke have megen glæde af en lommeregner eller et regneprogram, hvis man ingen talforståelse har. Det interessante og svære spørgsmål er her, hvor megen og hvilken talforståelse, der bør sigtes mod.

Et lignende spørgsmål rejser sig hver gang, vi ønsker at inddrage et nyt værktøj i matematikundervisningen, og svaret er sjældent så enkelt som ved kvadratrodsuddragningen.

Funktionstegning

Tag til eksempel funktionstegning. De fleste lærere vil jo nok mene, at dette emne må indledes med en fase, hvor papir og blyant er værktøjet. Ved et sådant indledende arbejde opnås forståelse for, hvordan man ud fra en funktionsforskrift kan udforme en tabel med punkter, der indsat i et koordinatsystem giver en idé om, hvordan funktionens graf ser ud. Når udførelsen af dette tidkrævende arbejde med at tegne en graf ikke længere er noget problem, kan tiden så være inde til at finde en sort boks, der kan overtage dette nu trivielle arbejde.

Her er der mange muligheder at vælge imellem. De kunne overordnet grupperes i regnearksprogrammer og funktionstegneprogrammer (herunder grafiske lommeregnere).

Et regnearksprogram er sværest at håndtere, men da det jo er et generelt anvendeligt program, er kendskab til håndteringen af det måske allerede helt eller delvist opnået i anden sammenhæng. I et regnearksprogram må eleven selv udforme en funktionstabel, men dette lader sig hurtigt gøre ved hjælp af formelkopiering og tabellen kan udformes fleksibelt, sådan at det er enkelt at ændre startværdi og tilvækst for den uafhængige variabel. En sådan fleksibel opbygning af tabellen kan fx være nyttig i forbindelse med undersøgelse af nulpunkter og lokale ekstremumspunkter. Man kan vælge at få afbildet tabellens punkter i et såkaldt XY-diagram eller i et XY-liniediagram, hvor på hinanden følgende punkter er forbundet med rette liniestykker. Skaleringen af akserne foretager programmet ud fra tabellens værdier. Ændres startværdi og/eller tilvækst for den uafhængige variabel vil dette straks afspejles i grafbilledet.

I et funktionstegneprogram skal eleven ikke udforme en funktionstabel, men blot angive funktionsforskriften, og den del af funktionens graf, der så er synlig i et på forhånd givet udsnit af koordinatsystemet, vil blive vist. Det er muligt at ændre på, hvilket udsnit af koordinatsystemet, der skal vises, ligesom man kan zoome ind på særligt interessante dele af det viste udsnit. Nogle funktionstegneprogrammer kan være udbygget med mulighed for at opstille tabeller og angive tal for nulpunkter og lokale ekstremumspunkter.

Der er mest elevstyring af funktionstegningen ved regnearksprogrammet. Processen ligger her meget tæt op ad, hvad der sker i blyant og papir situationen. Den sorte boks er derfor lettere at gennemskue.

Ved funktionstegneprogrammet får den sorte boks en funktionsforskrift som inddata, og hvordan denne kan give anledning til den graf, der så dukker op, er nok ikke helt så enkelt at gennemskue, som ved regnearksprogrammet. Til gengæld får man hurtigere grafen frem, da der kræves mindre elevstyring af funktionstegningen. Men hvis man på den anden side ingen idé har om forbindelsen mellem funktionsforskriften og grafen, vil grafen jo ikke kunne være til megen nytte.

Det er naturligvis vigtigt for læreren at have gjort sig disse fordele/ulemper ved de forskellige værktøjer klart. Kun derved er en god rådgivning af eleven om værktøjsvalg mulig. I lovens ord om undervisningsdifferentiering ligger også, at hvad der er et godt værktøj for en elev ikke nødvendigvis er det for en anden.

Sorte bokse skal bruges i undervisningen ikke til at stoppe tankevirksomhed men til at fremme den. En sort boks, der kan det hele, hvor man blot behøver at indtaste (eller oplæse) problemet uden at have forstået det, og så får løsningen serveret, må i undervisningsmæssig henseende være ret uinteressant. Et minimumskrav må vel være, at man kan identificere de nødvendige inddata, og at man har mulighed for at tolke uddata og skønne over om uddata er rimelige (tænk fx på skatteberegning). Har man derudover mulighed for i princippet at følge, hvad der sker i den sorte boks, og ved man at givet tilstrækkeligt med tid, ville man selv kunne arbejde sig frem til løsningen, så er dette naturligvis en mere ideel situation.

Rigtigt anvendt vil sorte bokse kunne fjerne kedelige, tidrøvende, rutinemæssige opgaver og i stedet give plads til overblik og kreativitet.

3. Fra tal til algebra

For 30-40 år siden skelnede man i læreruddannelsen og dermed i skolen ret skarpt mellem regning og algebra (aritmetik). Det første handlede om løsning af praktiske talproblemer, det andet om bogstavregning i form af ligningsløsning og reduktion af udtryk. Løsningen af regneproblemer foregik ved hjælp af sproglige ræsonnementer., og det var vigtigt med ord at kunne forklare selv vanskeligt forklarlige tilbageregninger. Senere fandt man det rimeligt, at anvende den i algebra opnåede viden, og det blev legalt at løse vanskelige talproblemer ved at opstille ligninger og løse disse efter indlærte metoder. Man kunne kalde det tal, man var på jagt efter, for x og så udtrykke sin viden om x ved hjælp af ligninger, der dernæst ved hjælp af indlærte procedurer lod sig løse.

Også denne fremgangsmåde bliver dog af mange elever opfattet som abstrakt og nærmest uforståelig. Blandt årsagerne til elevernes vanskeligheder kan nævnes (se fx Johan Häggström og Liora Linchevski & Nicolas Herscovics):

- manglende opfattelse af bogstaverne i algebra som repræsentanter for tal
- manglende forståelse af, at lighedstegnet udtrykker en ækvivalens og ikke udtrykker et dynamisk 'bliver lig med'
- løsningen af ligninger bliver mere forbundet med ritualer i løsningsprocessen end med den fundne numeriske løsning
- manglende forståelse af (udenadlærte) operationer, der udføres på de algebraiske udtryk eller ligninger
- et bogstavsymbol opfattes som en statisk position, der kun kan regnes på, hvis det erstattes af et tal - med andre ord regneoperationer, hvori indgår variable, kan først erkendes, når de variable er tillagt en værdi

I forbindelse med regneprogrammer er især den første og sidste årsag interessant, for i et regneprogram optræder en variabel altid med en eller anden tillagt værdi. På den måde er algebraisering, der foregår i et regneprogram, mindre abstrakt og dermed forhåbentlig lettere forståelig.

Man lader ikke i et regneprogram det, man leder efter, være et abstrakt i luften frit svævende bogstav. Man tager i stedet udgangspunkt i et konkret gæt 57 eller 394, eller hvad man nu finder passende, og så ser man på, hvad konsekvensen af et sådant gæt er, idet man udformer en model, der regner videre med tallet. Passer resultaterne, der følger af ens gæt, ikke med de givne oplysninger, så må man ændre på gættet, indtil en overensstemmelse er opnået. Man tager udgangspunkt i et konkret tal, og man tænker fremad. En variabel er altså i denne sammenhæng altid tillagt en værdi, men værdien kan meget nemt ændres og dermed også de af den afhængende værdier.

Den traditionelle matematiske notation er statisk i den forstand, at den består af nogle 'døde' symboler på et stykke papir. Udtrykket $f(x)=2x+1$ er statisk - det fungerer ikke. Hvis man vil anvende den skrevne funktion, så er det i ens eget hoved, at man skal få noget til at fungere.

I et regneprogram er det indtastede udtryk 2*Al +1 dynamisk. Man får udtrykket til at fungere ved at indsætte en værdi i Al, og får så straks udtrykkets tilhørende værdi vist. Den regnemæssige side af sagen overtages af computeren, og eleven kan koncentrere sig om at formulere og opstille de matematiske udtryk, der beskriver en forelagt situation, indhente erfaringer fra den opstillede model, tolke resultaterne og overveje konsekvenser.

Som antydet ovenfor har man med et regneprogram let adgang til gættemetoden. Denne metode vil i mange situationer opfattes som den enkleste at anvende, idet den tillader fremadregning i stedet for tilbageregning eller ligningsløsen, og fordi dens resultater ofte vil være lettere at tolke (se eksempler i afsnit 5).

Den algebra, der bruges i et regneprogram, kan siges at være mere jordnær end den, der traditionelt bruges i skolen og som ofte rubriceres som henholdsvis reduktion af udtryk og ligningsløsning.

Med regneprogrammer til rådighed har man:

- at man nødvendigvis må arbejde med elektroniske tal. I den nye vejledende læseplan nævnes både de rationale tal og de reelle tal, men de tal, som eleverne nu nødvendigvis må møde ved brug af lommeregner og computer er ikke omtalt noget sted, og de opfører sig jo ikke altid som reelle tal. (Eks.: på en lommeregner til skolebrug giver 100/43*43 resultatet 99.999995)
- mulighed for en glidende, jordnær overgang mellem talbegrebet og variabelbegrebet
- et udvidet variabelbegreb - ved opstilling af modeller i et regneprogram vil man ofte arbejde med langt flere end de gængse l eller 2 variable
- Eks.: 3 uafhængige variable og 2 afhængige (i miniREGN):

	Navn	**Udtryk**	**Værdi**
Al	pris	600	600.00
A2	momspct	25	25.00
A3	moms	pris*momspct/100	150.00
A4	fragt	75	75.00
A5	betal	pris+moms+fragt	825.00

- meget ofte mulighed for ved trinvise fremskrivninger hurtigt at finde resultater, der ellers ville kræve brug af indviklede formler (Eks.: summen af de 50 første kvadrattal).
- kendskab til reduktion (omformning) af udtryk vil være nødvendig for at kunne erkende at to udtryk begge beskriver den samme situation (Eks.: omkredsen af et rektangel med siderne a og b, beskrives af en elev som a+b+a+b, af en anden som 2a+2b, af en tredje som....)
- ligningsløsning er mindre nødvendig, da man i regneprogrammer har gættemetoden og avancerede muligheder for grafaflæsning til rådighed (se eksempler i afsnit 5)

Mon ikke regneprogrammer vil få en stærk indflydelse på den algebra, der dyrkes i skolens matematikundervisning?

4. Regneprogrammer: Regnearksprogrammer og miniREGN

Seymour Papert har i sin bog 'Mindstorms' beskrevet sit arbejde med at udvikle et program (LOGO) til børn. Hans stræben var imod et program, der skulle være uden tærskel og uden loft, dvs. det skulle være nemt at gå til, og samtidig skulle der ikke være grænser for, hvad programmet kunne bruges til.

Denne intention rører ved et meget vigtigt problem i forbindelse med brug af computer i undervisningen. Inden et program inddrages i undervisningen, bør det nøje overvejes, hvad indgangstærsklen til programmet er, og om det faglige udbytte, man kan have af programmet, står i et rimeligt forhold til det, der skal investeres af tid og kræfter for at komme over tærsklen. Som regel vil det, der skal til for at komme over tærsklen intet have at gøre med det faglige udbytte, som man forventer at få ved arbejdet med programmet. Hvis det er tidkrævende og sejt at komme over tærsklen, og det så viser sig, at der er meget lavt til loftet, vil det have været en dårlig investering at inddrage programmet i undervisningen.

Da de første computere fandt vej til skolen, var der endnu ikke udviklet dedikerede værktøjer til fx behandling af tekst og tal. Computeren kom blot med et styresystem og et programmeringssprog som fx BASIC eller COMAL. Der var således i en matematikundervisning, der ønskede at inddrage edb, ikke mulighed for andet end at programmere. Erfaringerne fra dengang viser, at skønt der ved et sådant programmeringssprog unægteligt er højt til loftet, så er indgangstærsklen også så høj, at det i almindelighed ikke er givtigt at inddrage programmering i undervisningen.

Man kunne nu forvente, at et mere målrettet værktøj som et regnearksprogram, ville være programmet, der med den store vægt, der i skolens matematikundervisning lægges på tal og algebra, først og fremmest blev inddraget i matematikundervisningen. Det er dog mit indtryk fra Lærerhøjskolekurser, såvel traditionelle som fjernkurser over datanet, at dette ikke er tilfældet. Muligvis er tærsklen også til regnearksprogrammer for høj, og ret sikkert har man ikke opdaget, hvor højt til loftet, der faktisk er, når man ønsker at inddrage regneark i matematikundervisningen.

Den matematiske kerneidé i et regneark er besnærende simpel. Man har uafhængige variable i talceller og afhængige variable beskrevet i formelceller, og kan så ved hjælp af dette beskrive og undersøge utallige sammenhænge.

På trods af dette meget enkle grundlæggende princip i et regneark vil man se, at manualer til (især professionelle) regnearksprogrammer er ret omfangsrige. Den del af manualerne, der omhandler det grundlæggende princip (matematikken) i et regneark udgør en meget lille del, mens for matematikken perifere ting som fx muligheder for layout af skærm- og printerbilleder optager megen plads. Man kan så i undervisningen enten vælge at bruge tid og kræfter på disse mere perifere ting, eller man kan vælge at ignorere dem. Det sidste kan dog være overordentlig svært, da man altid af vanvare vil kunne komme til at aktivere en af de faciliteter, der findes i programmet, og som man forsøger at undgå.

Man kan høre nogle lærere udtrykke følgende dilemma: Det er vanskeligt at starte med regneark tidligt i skoleforløbet, og i slutningen af skoleforløbet, hvor man kunne have meget stor glæde af regneark, kan eleverne derfor ikke håndtere et regnearksprogram, og ydermere er tiden nu for knap til at lære håndteringen.

Det, der mangler, er måske et beskåret regnearksprogram, der i en meget enkel og meget synlig form præsenterer den grundlæggende idé i et regneark. I INFA-matematik projektet har vi med miniREGN forsøgt at give et bud på et sådant program. Programmet er så enkelt, at det kan anvendes helt fra begyndertrinnet, og samtidig er der i det så højt til loftet, at det kan være særdeles nyttigt ved fx folkeskolens afgangsprøve.

For at kunne have glæde af miniREGN må man (ligesom ved lommeregneren) have et elementært talkendskab med viden om, hvordan man i princippet kunne udføre de taloperationer, som man sætter programmet til at udføre. Ligeledes er det af afgørende betydning, at man kan skønne over, om resultaterne er rimelige. Med disse forudsætninger kan man så til gengæld med miniREGN gå på opdagelse i matematikkens verden.

miniREGN kunne kort beskrives som en mellemting mellem en lommeregner og et regnearksprogram.

miniREGN sammenlignet med lommeregnere

Programmet kan anvendes som en lommeregner, idet man indtaster et regneudtryk, hvori indgår tal, regneoperatorer og eventuelle parenteser, og programmet viser så udtrykkets værdi ved siden af udtrykket.

Ved miniREGN har man den fordel frem for ved lommeregneren, at fremgangsmåden er synlig og kan debatteres. Ved lommeregneren forsvinder tallene, efterhånden som man taster nye tal ind, og tryk på en tast med en regneoperator bliver overhovedet ikke synliggjort. Dette er specielt i en undervisningssituation særdeles uheldigt. Når eleven kommer frem til et forkert resultat og mener at have brugt en rigtig fremgangsmåde, så har læreren og eleven ingen mulighed for at finde frem til, hvor det gik galt.

Når man bruger lommeregner, må man endvidere både skrive og taste. Ved brug af miniregn kan det indtastede og beregnede udskrives på printer.

Adgangen til en lommeregner er i øjeblikket lettere end adgangen til miniREGN, men denne fordel vil forsvinde efterhånden som lommeregneren i skoletasken erstattes med en lille computer.

miniREGN sammenlignet med regneark

miniREGN kunne også beskrives som et regnearksprogram med blot én søjle, hvor til gengæld søjlen er bredt ud i 3 undersøjler, således at alt - modsat hvad der er tilfældet i et regneark - er umiddelbart synligt.

I den første undersøjle (Navn) kan man anbringe et navn, i den anden (Udtryk) kan man anbringe et regneudtryk for det pågældende navn og i den tredje (Værdi) vil værdien af regneudtrykket blive vist. I et regneudtryk kan indgå et tidligere angivet navn, og ved beregningen af udtrykket vil navnet så blive erstattet med sin værdi. I miniREGN er det altså, ligesom i regnearksprogrammer muligt at opstille modeller til beskrivelse af sammenhænge. Sådanne opstillinger kan ligesom regneark gemmes på disk til senere genbrug.

I et regneark ser man umiddelbart kun det, der svarer til Værdi-søjlen i miniREGN. Udtrykkene (formlerne), der frembringer værdierne, er i et regneark ikke umiddelbart synlige. Kun for den celle markøren står på, kan man aflæse den tilhørende formel. Vil man kunne se alle formler i et regneark på én gang, må man til gengæld give afkald på at se deres værdier.

Der kræves således ved brugen af regneark, at brugeren uden megen visuel støtte selv holder styr på de mekanismer, der får regnearket til at fungere. Ligeledes betyder det, at den der skal vurdere et regneark, nødvendigvis må have ikke blot en udskrift af regnearket, men også af dets formler, eller simpelthen muligheden for via regnearksprogrammet at åbne regnearket og studere det nærmere.

Man har altså ikke i et regneark samme overblik over den model, der er anvendt til at beskrive problemet, som man har i miniREGN. I en undervisningssituation er det naturligvis af stor betydning at have et sådant samlet overblik over modellen og dens virkning på et sæt af inddata.

I miniREGN kan der ud over regneudtryk anvendes logiske udtryk og betingede udtryk. Ligeledes har man som ved regneark mulighed for at tage kopi af et udtryk og sætte kopien i et område. Ved en sådan kopiering kan man vælge, om et navn i udtrykket skal udgøre en relativ eller en absolut henvisning. Endvidere er der mulighed for 5 forskellige typer af grafiske afbildninger af værdierne fra et område.

Regnearket har til gengæld de mange søjler, som giver mulighed for at beskrive nogle situationer, som mini-REGN må give op overfor (fx afbildning af to funktioner i ét koordinatsystem), eller som kun med lidt besvær kan beskrives i miniREGN (fx afbildning af én funktion i et koordinatsystem). Ligeledes er der flere muligheder i regnearket for at kombinere tekst-, tal- og formelceller på en måde, der kan gøre beskrivelsen mere letlæselige. De flere muligheder, der ligger i et regneark, bevirker naturligt nok, at det kræver længere tid at lære håndteringen af et regnearksprogram end at lære at håndtere miniREGN.

Ulemper ved regnearksprogrammer er altså:

- det kræver ret megen tid, før eleven er fortrolig med dets virkemåde og muligheder
- de indlærte færdighed i regnearks-sproget kræver stadig vedligeholdelse
- regnearkets opbygning er ikke umiddelbart synlig hverken for eleven eller for den, der vil vurdere regnearket.

Selv om miniREGN med sine mange indbyggede funktioner, kan bruges i utrolig mange sammenhænge, vil nogle måske hen ad vejen føle, at de støder mod loftet. Men hvis det er tilfældet, så vil overgangen til et rigtigt regnearksprogram formentlig ikke volde de store problemer.

For en nærmere beskrivelse af miniREGN se hæftet Indføring i miniREGN, INFA 1995.

miniREGN findes også i den programpakke, som forlaget Gad & Grafisk udgiver til sit matematiksystem Matematik-tak for l .-3. klasse. Her hedder programmet REGNE. Gad & Grafisk udgiver hæftet EDB-TAK, REGNE, som er rettet mod elever på klassetrinnene 1-3.

5. Folkeskolens skriftlige afgangsprøve 1996

Det er en kendt (og ikke overraskende) sag, at folkeskolens afgangsprøver i matematik har en meget styrende virkning for den matematikundervisning, der finder sted især på folkeskolens ældste klassetrin.

I ugebrevet Mandag Morgen, Nr. 19-20. maj 1996 kan man læse:

> *'… Der har i de seneste år været en betydelig stigning i antallet af elever, der har ønsket at gøre brug af pc'er i eksamenssituationen, og en undersøgelse har vist, at disse elever generelt opnår bedre karakterer end elever, der ikke anvender computer. I en udtalelse til Jyllands-Posten siger undervisningskonsulent, Niels Plischewski, Undervisningsministeriet, at det på den baggrund er nødvendigt at ændre eksamensbestemmelserne. Fra næste år vil eleverne kunne anvende computere uden forudgående tilladelse.'*

Det kunne bl.a. på baggrund af dette være interessant dels at undersøge, hvordan en elev med kendskab til et regneprogram kunne have grebet de nye skriftlige matematikopgaver til folkeskolens afgangsprøve maj-juni 1996 an, og dels at overveje, hvordan de stillede opgaver kunne ændres eller udbygges set i lyset af elevens adgang til et sådant regneprogram.

Der er naturligvis ved en sådan fremgangsmåde, hvor man anvender ny teknik på gamle problemstillinger, en fare for, at man overser nye og interessante problemstillinger, som først er blevet aktuelle med den ny teknik. På den anden side er de skriftlige afgangsprøver, der sigter mod alle landets 9. klasse elever, et nærliggende sted at tage afsæt i.

Det følgende skema giver en oversigt over hvor stor en del af opgavesættet, der kunne løses dels ved hjælp af miniREGN og dels ved hjælp af Works regnearksprogrammet.

Tal i parenteser angiver, at svarene på nogle spørgsmål ikke direkte lader sig udskrive fra regneprogrammet, men at regneprogrammet kan bruges til at foretage hjælpeberegninger, fx omsætninger af mål i forbindelse med målestokstegning.

Folkeskolens nye skriftlige afgangsprøve 1996

		Antal spørgsmål, der kan besvares med	
Opgave nr.	**Antal spørgsmål**	**miniREGN**	**regnearksprogram**
1	5	5	5
2	7	5 (7)	5 (7)
3	5	5	5
4	5	4 (5)	5
5	4	4	4
6	8	7 (8)	**8**
I alt:	**34**	**30 (34)**	**32 (34)**

Som det ses, vil man med blot et elementært regneprogram som miniREGN kunne besvare næsten alle spørgsmål i årets opgavesæt. Samtidig vil de anvendte løsningsmodeller være klart aflæselige. Med anvendelsen af miniREGN kan eleven koncentrere sig om, hvilken regnemodel, der er passende ved løsningen af et problem, og overlade det distraherende og trivielle problem med udregningerne til computeren. Dette ville naturligvis også være tilfældet ved brug af lommeregner, men med computeren er der den yderligere gevinst, at man ikke som ved lommeregnerbrug både skal taste ind og også skal skrive tal og fremgangsmåde (og resultatet) ned på papir.

Anvender man et regnearksprogram (her Works) vil der, som det ses af skemaet, være yderligere et par spørgsmål, der kan besvares direkte vha. programmet, og besvarelsen vil af den elev, der er fortrolig med programmet, kunne sættes mere elegant op. Til gengæld er tærsklen til programmet også højere - programmet kan mere, og der må derfor bruges mere tid på at blive så fortrolig med programmet, at man ikke kommer i situationer, hvor man bliver låst pga. uvidenhed om programmets mange detaljer. Endvidere er der, sammenlignet med miniREGN, den ulempe, at brugerens løsningsmodeller ikke er direkte synlige.

I det næste afsnit behandles de få spørgsmål, hvor de to regneprogrammer alene ikke var nok, og i afsnittet efter ses på nye løsningsmetoder, som regneprogrammerne muliggør. Endvidere ses der også på, hvordan spørgsmålene kunne være udbygget, når man har et så kraftigt værktøj til sin rådighed.

Hvilke spørgsmål kræver mere end miniREGN eller et regnearksprogram?

Opgave 2

I spørgsmål a) får man opgivet målene på et bistade og skal så lave en nøjagtig tegning i målestoksforholdet 1:5.

Selve tegningen kan ikke udformes i et regneprogram, men omsætningen af mål kan lettes ved i regneprogrammet at opsætte en lille regnemodel, der som inddata har et af bistadens mål og som uddata giver det tilsvarende mål på tegningen.

I spørgsmål b) skal man angive vinklerne i en trekant på tegningen fra spørgsmål a).

Det er jo nok meningen, at man her finder svaret ved hjælp af en vinkelmåler, men med lidt kendskab til de trigonometriske funktioner, som er lige ved hånden i et regneprogram, kan det også lade sig gøre at beregne vinklerne vha. miniREGN eller et regnearksprogram.

Hvad kunne tale for at inddrage de trigonometriske funktioner i folkeskolens matematikundervisning?

- De er let tilgængelige i regneprogrammer
- Ved arbejdet med målestoksforhold og ligedannethed (se Læseplan for Undervisning på de afsluttende trin 7.-9. klasse) kunne det være nærliggende fx at se på, hvordan vinklerne i retvinklede trekanter udelukkende afhænger af forholdet mellem et par af siderne, og ad den vej nærme sig de trigonometriske funktioner.
- I Læseplan for Undervisning i 10. klasse kan man læse: 'Ved løsning af geometriske problemer benytter eleverne tegning, måling eller beregning. Edb-programmer kan anvendes'. På ét niveau kunne man tænke sig, at beregninger af størrelser i en trekant foregik ved hjælp af et regneprogram, hvori man ud fra kendskab til trigonometri indsatte de nødvendige formler. På et andet niveau kunne man forestille sig, at trekantstørrelser blev beregnet vha. et specielt edb-program, hvor man kunne indtaste de kendte størrelser i trekanten og så få de ukendte størrelser beregnet. Et sådant program, TRIGONOM, er udviklet i INFA-Matematik projektet. På begge niveauer virker computeren som en sort boks. I det første tilfælde er det de trigonometriske funktioner, der ud gør den sorte boks. Man forsyner funktionerne med argumenter og får på ikke nærmere forklaret måde funktionsværdierne. Men relationerne mellem trekantens størrelser og de trigonometriske funktioner må i dette tilfælde være klart beskrevne. I det andet tilfælde er også disse relationer gemt i den sorte

boks. Her må man blot fodre programmet med tilstrækkelige oplysninger, til at trekanten er fastlagt.

Opgave 4
I spørgsmål c) skal man i et koordinatsystem tegne graferne for de to funktioner: y = 900-x og y = 1230-x

Dette kan ikke lade sig gøre i miniREGN, men lader sig snildt gøre i et regnearksprogram.

Opgave 6
I spørgsmål e) skal man tegne et skema med 5 rækker og 6 søjler (plus en søjle med tekst). Skemaet er vist og delvist udfyldt i opgaven.

Den 2-dimensionale skemastruktur kan ikke direkte vises i miniREGN, men man kan ved kopiering af udtryk frembringe tallene i skemaets første række og under dem tallene i skemaets anden række, osv. Det kræver naturligvis lidt overblik at kunne omsætte skemaets 2-dimensionale struktur til miniREGN's 1-dimensionale.

Skemastrukturen kan derimod direkte overføres til et regneark, hvor tallene ligeledes kan frembringes ved kopiering.

Hvilke spørgsmål kan med et regneprogram løses på en utraditionel måde?

Opgave 1
I spørgsmål e) skal man skrive de udenlandske honningprodukter i rækkefølge med den billigste først og den dyreste sidst.

Man må da først finde sammenlignelige priser fx kiloprierne eller måske mere nærliggende prisen for 450 g. Dernæst skal disse priser så rangordnes. I miniREGN må man selv skrive denne rangordning, men i mange regnearksprogrammer findes en funktion, hvor man blot skal udpege det (fx de rækker), der skal sorteres og også angive hvad (fx hvilken søjle), der skal sorteres efter, og om der skal sorteres i stigende eller aftagende orden.

I dette tilfælde er den krævede færdighed gået fra at kunne skrive tallene op i den rigtige rækkefølge til at kunne lokalisere sorteringsfunktionen i regnearksprogrammet og fodre denne med de relevante data.

Opgave 2
I spørgsmål f) får man opgivet en formel, der giver den indvendige længde af bistadet som en funktion af antallet af rammer, og skal så finde den indvendige længde, når der er 17 rammer.

I et regneprogram vil det være naturligt at modellere situationen generelt, således at antallet af rammer er inddata, og udtrykket, der finder den tilhørende indvendige længde, er uddata. 17 gives som inddata, og man aflæser så den tilhørende indvendige længde.

I spørgsmål g) bliver man bedt om at finde antallet af rammer, hvis den indvendige længde er 74.4 cm. Man skal altså regne baglæns eller løse ligning, hvad der falder mange elever vanskeligt. Med den (fremadregnende) opstilling, som er udformet i forbindelse med spørgsmål f), kan eleven imidlertid tænke fremad og prøve sig frem med forskellige antal rammer, indtil der findes en løsning. Gætningen lettes her ved, at der kun kan komme hele tal på tale.

Gættemetoden kan altså føjes til de løsningsmetoder, eleven kan vælge imellem. Der kræves ved denne metode en forståelse af sammenhængen mellem inddata og uddata, for at man gennem stadigt mere kvalificerede gæt kan nærme sig en løsning.

Gættemetoden er naturligvis også til rådighed, selv om man ikke har et regneprogram, men i praksis vil den ofte være uhåndterbar uden dette.

Ønsker man at anvende tilbageregningsmetoden, kan regneprogrammet også være til nytte.

Opgave 3
I spørgsmål e) har man igen mulighed for at omgå tilbageregning eller ligningsløsning ved at vælge gættemetoden. Man kan ikke med et helt antal bier nøjagtigt ramme de 450 g honning, der efterspørges, og må så overveje, om der skal vælges tallet lidt under eller tallet lidt over. De fremadgående beregninger, hvor man naturligt kun gætter på et helt antal bier, letter de overvejelser.

Vælger man at løse opgaven ved tilbageregning eller ligningsløsning får man (med 2 dec.) 393.59 bier, og må så til at forsøge at tolke dette underlige resultat. Formentlig vil det kræve nogen fremadgående regneovervejelser at afgøre, hvad det endelige svar bør være.

Opgave 4
I spørgsmål e) skal man finde, hvor mange flere bistader, der skal til for at bevare en indtægt på 9840 kr., når man går over til biologisk drift.

Her kunne svaret aflæses på de ved spørgsmål c) tegnede grafer. Men der er igen her muligheden for at tænke fremadrettet med gættemetoden. Tilbageregning vil som vist give (med 2 dec.) 10.93 bistader - igen et resultat, der kræver en vis form for tolkning.

Opgave 5
Skemaet, der skal laves i spørgsmål e), må i miniREGN skrives lodret i stedet for vandret. Skemaets første diastasetal er 20, og hvert af de efterfølgende diastasetal fremkommer ved halvering af det foregående. Den

øvede regneprogrambruger vil i en sådan situation straks tænke på regneprogrammets mulighed for kopiering af udtryk (formler).

I miniREGN tages en kopi af divisionsudtrykket og dette udtryk sættes i et område bestående af så mange af de efterfølgende linier, som man ønsker. Ved en sådan kopiering flyttes fokus fra en række trivielle udførelser af divisioner med 2 til en mere generel erkendelse af strukturen i problemet.

Ved de grafiske afbildninger i et regneprogram må brugeren selv i programmet angive en tabel med de tal, der skal afbildes, modsat et funktionstegneprogram, hvor der angives en funktionsforskrift, og programmet så ud fra denne producerer en tabel til brug for tegningen. Funktionstegning med regneprogrammer kommer derved i højere grad til at ligne den metode, der anvendes med papir og blyant. Brugeren er således tættere på, hvad der foregår, og kan selv på tegningen kontrollere, hvordan tallene i regneprogrammets tabel er blevet afbildet.

Ved grafmuligheden Datakurve i miniREGN bliver de medfødte linienavne i det afmærkede område anbragt ud ad den vandrette akse med lige stor afstand imellem sig. Ud ad den lodrette akse afsættes liniernes værdier. Værdipunkterne forbindes med rette linier. Valget Datakurve kan således anvendes til en grafisk afbildning af diastasetallene i skemaet, idet man dog selv må holde styr på tallene på den vandrette akse.

I spørgsmål d) bliver man spurgt om diastasetallet efter 8 dage. Man kan aflæse et tilnærmet svar på den brudte linie, hvilket vil svare til lineær interpolation. Eller man kan pr. intuition erstatte den brudte linie med en krum kurve og ved aflæsning på denne måske få en bedre tilnærmelse.

I den vejledende læseplan for undervisning på afsluttende trin 7.-9. klasse kan man under afsnittet om arbejde med tal og algebra læse:

'Der arbejdes med

- *...*
- *...*
- *undersøgelse af 'forandringer', fx sådanne, som findes i tal følger, figurrækker og mønstre, hvor eleverne forsøger at beskrive eller at opstille simple formler, som udtrykker sammenhængen'*

Det er vel ikke helt utænkeligt, at elever med en sådan erfaring i at finde beskrivelser af sammenhænge kunne nå frem til følgende beskrivelse af diastasetallets udvikling:

	dage	diastasetal
0	0	20
1	31	10
2	62	5
3	93	2.5
:	:	:
:	:	:
n	n*31	20/(2*2*...*2) = 20/20^n med n faktorer i parentesen
:	:	:
:	:	:

og kunne udmønte denne beskrivelse i en model som den, der er vist i miniREGN-arket. Det ses af skemaet, at diastasetallet vil antage værdien 8 for en værdi af n mellem l og 2. Ved hjælp af miniREGN-modellen kan man gætte sig frem med så mange decimaler, som man orker, til en n-værdi, der giver diastasetallet 8, og så aflæse det tilhørende antal dage.

Vil det mon gå op for (genere?) eleverne, at der arbejdes med en ikke heltallig eksponent? Hvordan en sådan beregnes er jo overladt til regneprogrammet.

Har eleven (hvad der nok i dette specielle tilfælde ikke er realistisk at tro) fundet funktionsforskriften (f(x) = 20/2^(x/31)), kan en fleksibel funktionstabel udformes. Fleksibel i den forstand, at man ved at ændre på blot to værdier kan bestemme, for hvilken x-værdi tabellen skal starte og hvilken afstand, der skal være mellem to på hinanden følgende x-værdier. Der er på denne måde mulighed for at zoome ind på den del af funktionen, som man er interesseret i.

Noget tilsvarende lader sig naturligvis gøre i regnearket.

Opgave 6

Har man arbejdet med regneark og er fortrolig med de meget vigtige muligheder, der ligger i at kunne kopiere formler i et regneark, så vil man nok ved en sådan opgave kigge efter sammenhænge mellem cellerne og gøre sig klart, at den første søjle består udelukkende af 1-taller, de tre øverste rækker består blot af de første naturlige tal og i de to nederste rækker fremkommer et tal som summen af tallet til venstre og tallet ovenover. Med disse oplysninger til rådighed er det i et regneark en smal sag, at fylde skemaet ud og også at føje flere søjler til skemaet. Den ved spørgsmål h) givne formel for det samlede antal bægre i den n'te opstilling bliver derved nærmest overflødig.

En sådan trinvis fremskrivning vil med computeren til rådighed nok være en mere nærliggende og mere forståelig måde at løse problemer på end brug af formler, som fx den opgivne for det samlede antal bægre i den n'te opstilling: S = n*(n+l)*(n+2)/6

Den trinvise fremskrivning vha. kopiering af udtryk kan også lade sig gøre i miniREGN, men ikke helt så elegant som i et regneark. Man må i miniREGN først ved kopiering frembringe rækken med antal i bundens side (dvs. de første (fx 13) naturlige tal). Dernæst kan man ligeledes ved kopiering gå i gang med antallet af bægre i nederste lag, og endelig kan man så ved kopiering få det samlede antal bægre. Da tallene nødvendigvis står under hinanden i miniREGN, er det ikke så enkelt at aflæse resultaterne, som i et regneark, hvor skemaformatet direkte kan anvendes.

Ved frembringelse af skemaet ved kopiering i miniREGN eller et regneark flytter man igen fokus fra de trivielle udregninger til den generelle sammenhæng mellem tallene i skemaet.

Naturligvis kan man også have glæde af opgivne formler i forbindelse med miniREGN. Med den opgivne formel for det samlede antal bægre i den n'te opstilling og med formlen for summen af de n første naturlige tal, kan man i miniREGN lave en opstilling, hvor man indtaster en værdi for n og får givet for den n'te opstilling antallet af bægre i nederste lag og det samlede antal bægre.

Et kraftigt værktøj som et regneprogram kan bringe problemfelter, der før var utilgængelige, inden for rækkevidde. Eksempel:

I spørgsmål d) er der mange mulige løsninger, og det ville være nærliggende at overveje, om nogle løsninger af en eller anden grund var at foretrække frem for andre. Fx kunne man være interesseret i, at der skulle anvendes så lidt pap som muligt til at lave æsken.

En søgning efter den af de mulige kasser, der har mindst overflade, vil være ret uoverskuelig uden et regneprogram. Men har man et sådant, er det enkelt at udforme en lille model, der som inddata har antal lag og rækker (og hvor man lige må kontrollere, at disse giver et helt antal søjler) og som uddata kassens overflade. Med modellen til rådighed kan man koncentrere sig om opgaven med at finde, hvilke muligheder der er for at anbringe de 24 bægre i lag, rækker og søjler. Ligeledes er det enkelt at få et visuelt billede af størrelserne af de forskellige æskers overflade ved hjælp af graftegning.

Konklusion

Ved de traditionelle skriftlige afgangsprøver kan næsten alt besvares med et regneprogram.

I miniREGN er de anvendte matematiske modeller fuldt synlige, og programmet er så enkelt at betjene, at man kan starte brugen af det allerede på de første klassetrin. Til gengæld er mulighederne for en pæn opsætning begrænsede sammenlignet med et regneark.

Regneark giver altså mulighed for en pænere opsætning af svarene, specielt hvor man arbejder med to-dimensionale skemaer. Til gengæld er der ingen mulighed for direkte at se de matematiske modeller, der er anvendt, og kendskab til de mange faciliteter for en pænere opsætning, som jo kun berører selve matematikken perifert, kræver tid og vedligeholdelse.

Når regneprogrammer er til rådighed, kan nye løsningsmetoder (fx gættemetoden og trinvis fremskrivning) føjes til de gamle, og problemfelter, der før var uden for rækkevidde, kan nu tages op.

Muligvis kan nogle af de ovenfor foreslåede løsninger måske synes som overbud på, hvad man kan forvente af folkeskoleelever, men det må være vigtigt, at vi ikke på forhånd, ud fra vore egne sparsomme erfaringer som regneprogrambrugere, sætter nogle snævre grænser for, hvad de elever, der vokser op med et sådant program, kan præstere.

P.S.

En statisk beskrivelse som den ovenfor givne af opgavebesvarelser vha. af et regneprogram og med vedhæftede 'døde' udskrifter fra programmet, kan ikke viderebringe den fornøjelse, det er, at arbejde med et sådant program, i hvilket det er enkelt at udforme og se sine opbyggede modeller og som villigt påtager sig de kedelige og tidrøvende beregninger, sådan at man hurtigt kan se sine modeller i funktion og på den måde indhente erfaringer.

En udskrift fra et regneprogram giver kun et dødt øjebliksbillede. Det mest interessante ved brug af regneprogrammer vil som regel være brugerens interaktion med de opsatte modeller.

6. Litteraturliste

Deane E. Arganbright
Mathematical applications of electronic spreadsheets
McGraw-Hill, 1985

Johan Häggström
Tidigare algebra Nämnaren, nr. 2, p 2-3, 1995
Förstå algebra Nämnaren, nr. l, p 38-44, 1996

Liora Linchevski & Nicolas Herscovics
Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on the unknown in the context of equations
Educational Studies in Mathematics, 30: p 39-65, 1996

Inge B. Larsen
Indføring i miniREGN
INFA Matematik, 1995
Engelsk udgave: Introduction to miniCALC
INFA Mathematics, 1996

Inge B. Larsen
Solving algebraic word problems
Mathematics Teaching, 153, December 1995, p. 3-4

Inge B. Larsen, Allan C. Malmberg og Viggo Sadolin
INFA Rapport
Læremiljøer i en edb-støttet matematikundervisning
INFA Matematik 1994

Allan C. Malmberg
TRIGONOM
INFA Matematik, 1996

Seymour Papert
Mindstorms.
Children, Computers, and Powerful Ideas
Basic Books, Inc., 1980

Seymour Papert
The Children's Machine
Rethinking School in the Age of the Computer
Basic Books, Inc., 1993

Undervisningsministeriet, Folkeskoleafdelingen
Matematik. Faghæfte 12.
Undervisningsministeriet, 1995.

Anne-Grethe Ørbekker
EDB-TAK. REGNE. Edb for 1.-3. klasse.
Gad & Grafisk, 1994.

Artiklen er et uddrag af Inge B. Larsen: *Regneprogrammer – en analyse af faglige og pædagogiske muligheder*.
INFA-Småtryk 1996-3

Hæftet indeholder yderligere som bilag

- den skriftlige afgangsprøve fra 1996,
- en besvarelse af opgaverne ved hjælp af miniRegn, og
- en besvarelse af opgaverne ved hjælp af regnearksprogrammet Works.

INFA-Matematik: Informatik i matematikundervisningen er et delprojekt under

INFA: Informatik i skolens fag

Et forskningsprogram på Danmarks Lærerhøjskole